Exercices sur les Limites (corrigé)

Exercice n°54 p30

a. $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}-x-1$

La limite en -õ ne pose pas de pb : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}$ = +õ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-1)$=+õ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+õ}$.

En +õ, la factorisation de $f(x)$ par x ne résout pas l'indétermination. On utilise donc **l'expression conjuguée**.

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x-1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+5}+x+1\right)}{\sqrt{x^2+2x+5}+x+1}=\frac{x^2+2x+5-x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+2x+5}+x+1}=\boxed{\frac{4}{\sqrt{x^2+2x+5}+x+1}}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}$ = +õ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)$=+õ , alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5}+x+1\right)$=+õ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$.

b. $g(x)=\sqrt{x^2+4}-x$. La limite en -õ s'étudie comme en a. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+õ}$.

En +õ: $g(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{\sqrt{x^2+4}+x}=\dfrac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x}=\boxed{\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}$ = +õ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4}+x)$=+õ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0}$.

c. $h(x)=\sqrt{x^2-4x+9}-(x-2)$. On reprend la même démarche que pour f et g.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=+õ}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0}$.

d. $k(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4}$. La forme est indéterminée en +õ et -õ.

$$k(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}}=\frac{x^2+1-x^2-4}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}}=-\frac{3}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}$ = +õ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}$ = +õ, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4})$=+õ.

Pa suite $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=0}$.

N°57 p31

$h(x)=\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$. Etudions la limite de h en $x=3$.

L'observation immédiate monte une **Forme Indéteminée du type "$\frac{0}{0}$"**. Pour lever l'indétermination, on peut penser à factoriser le numérateur par $(x-3)$ pour pouvoir simplifier le quotient. Ce choix conduit à l'usage de l'expression conjuguée du numérateur.

$$h(x)=\frac{1}{x-3}\,\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\sqrt{x+6}+3}=\frac{1}{x-3}\,\frac{x+6-9}{\sqrt{x+6}+3}=\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}}.$$

On sait que $\lim\limits_{x\to3}(x+6)=9$; par suite, $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x+6}=\lim\limits_{X\to9}\sqrt{X}=3$. D'où $\lim\limits_{x\to3}(\sqrt{x+6}+3)=6$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to3}h(x)=\frac{1}{6}}$.

N°58 p 31

$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$. Si $x>0$, alors $|x|=x$. D'où, pour $x>0$, $\sqrt{x^2+1}=x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$.

Si $x<0$ alors $|x|=-x$. D'où, pour $x<0$, $\sqrt{x^2+1}=-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$.

Soit $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Pour $x>0$, on a, d'après ce qui précède: $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$; pour $x<0$, $g(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$. Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{X\to1}\sqrt{X}=1$.

Alors $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-1}$.