Recueil d'annales en Mathématiques

Terminale S - Enseignement obligatoire

Géométrie (barycentre et produit scalaire dans l'espace)

Frédéric Demoulin[1]

Dernière révision : 8 août 2005

[1] frederic.demoulin@voila.fr

Tableau récapitulatif des exercices

⋆ indique qu'un accent a été mis plus particulièrement sur ce(s) point(s) dans l'exercice
P.S. : produit scalaire ; R.P. : représentation paramétrique de droites

N°	Lieu	Année	QCM	Barycentres	Espace	P.S.	R.P.	Probabilités
1	Asie	Juin 2005	⋆		⋆	⋆	⋆	
2	La Réunion	Juin 2005			⋆	⋆	⋆	
3	Polynésie	Juin 2005	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	
4	Inde	Avril 2005		⋆	⋆	⋆	⋆	
5	Nouvelle-Calédonie	Nov 2004	⋆	⋆	⋆			
6	Amérique du Nord	Juin 2004	⋆	⋆				
7	Antilles-Guyane	Juin 2004		⋆	⋆			
8	Asie	Juin 2004			⋆		⋆	
9	France	Juin 2004	⋆		⋆		⋆	
10	Nouvelle-Calédonie	Mars 2004		⋆	⋆			
11	Amérique du Sud	Nov 2003			⋆			⋆
12	Nouvelle-Calédonie	Nov 2003			⋆	⋆	⋆	
13	Polynésie	Sept 2003			⋆		⋆	
14	Asie	Juin 2003			⋆	⋆	⋆	
15	France	Juin 2003			⋆			
16	La Réunion	Juin 2003			⋆	⋆		
17	Polynésie	Juin 2003			⋆			⋆
18	Nouvelle-Calédonie	Nov 2001		⋆	⋆		⋆	
19	Amérique du Nord	Juin 2001			⋆		⋆	
20	Centres étrangers	Juin 2001		⋆				
21	France	Juin 2001		⋆	⋆			

Exercice 1 Asie, Juin 2005 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on appelle $\mathscr{D}$ la droite d'équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{l} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = -3-t \end{array}\right.$ et $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $x+2y-3z-1=0$.

Dans chacune des lignes du tableau ci-dessous, une seule affirmation est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la ligne et la lettre correspondant à l'affirmation choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

Numéro de la ligne	Affirmation A	Affirmation B	Affirmation C
1.	Le point M de coordonnées $(-1\,;\,3\,;\,2)$ appartient à $\mathscr{D}$	Le point N de coordonnées $(2\,;\,-1\,;\,-1)$ appartient à $\mathscr{D}$	Le point R de coordonnées $(3\,;\,1\,;\,-4)$ appartient à $\mathscr{D}$
2.	Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1\,;\,2\,;\,-3)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$	Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(-2\,;\,1\,;\,1)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$	Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(3\,;\,1\,;\,-4)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$
3.	$\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$	$\mathscr{D}$ est strictement parallèle à $\mathscr{P}$	$\mathscr{D}$ est sécante à $\mathscr{P}$
4.	Le point G de coordonnées $(1\,;\,3\,;\,-2)$ appartient à $\mathscr{P}$	Le point G de coordonnées $(1\,;\,3\,;\,2)$ appartient à $\mathscr{P}$	Le point G de coordonnées $(1\,;\,3\,;\,-1)$ appartient à $\mathscr{P}$
5.	Le plan $\mathcal{Q}_1$ d'équation cartésienne $x+2y-3z+1=0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$	Le plan $\mathcal{Q}_2$ d'équation cartésienne $4x-5y-2z+3=0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$	Le plan $\mathcal{Q}_3$ d'équation cartésienne $-3x+2y-z-1=0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$
6.	La distance du point T de coordonnées $(-1\,;\,-3\,;\,2)$ plan $\mathscr{P}$ est : $\sqrt{14}$	La distance du point T de coordonnées $(-1\,;\,-3\,;\,2)$ au plan $\mathscr{P}$ est : 14	La distance du point T de coordonnées $(-1\,;\,-3\,;\,2)$ au plan $\mathscr{P}$ est : $2\sqrt{3}$

Exercice 2 La Réunion, Juin 2005 (4 points)

On appelle hauteur d'un tétraèdre toute droite contenant l'un des sommets de ce tétraèdre et perpendiculaire au plan de la face opposée à ce sommet.
Un tétraèdre est orthocentrique si ses quatre hauteurs sont concourantes.

Partie A

On considère un tétraèdre $ABCD$ et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre $ABCD$ issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on donne les points $A(3\,;\,2\,;\,-1)$, $B(-6\,;\,1\,;\,1)$, $C(4\,;\,-3\,;\,3)$ et $D(-1\,;\,-5\,;\,-1)$.

1. (a) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est :

$$-2x - 3y + 4z - 13 = 0.$$

   (b) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

   (c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD}$.

   (d) Le tétraèdre $ABCD$ est-il orthocentrique ?

2. On définit les points $I(1\,;\,0\,;\,0)$, $J(0\,;\,1\,;\,0)$, $K(0\,;\,0\,;\,1)$. Le tétraèdre $OIJK$ est-il orthocentrique ?

Exercice 3 Polynésie, Juin 2005 (5 points)

Pour chacune des cinq questions, une seule des trois propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère les points $A(3\,;\,1\,;\,3)$ et $B(-6\,;\,2\,;\,1)$.
Le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne $x + 2y + 2z = 5$.

1. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\| = 2$ est :

   (a) un plan de l'espace (b) une sphère (c) l'ensemble vide

2. Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ sont :

   (a) $\left(\dfrac{11}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$ (b) $\left(\dfrac{8}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{7}{3}\right)$ (c) $\left(\dfrac{7}{3}\,;\,-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$

3. La sphère de centre B et de rayon 1 :

   (a) coupe le plan $\mathscr{P}$ suivant un cercle

   (b) est tangente au plan $\mathscr{P}$

   (c) ne coupe pas le plan $\mathscr{P}$

4. On considère la droite $\mathscr{D}$ de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;\,2\,;\,-1)$ et la droite $\mathscr{D}'$ d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

   Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont :

   (a) coplanaires et parallèles (b) coplanaires et sécantes (c) non coplanaires

5. L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est :

   (a) la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} - t \\ y = \dfrac{3}{2} - 7t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

   (b) le plan d'équation cartésienne $9x - y + 2z + 11 = 0$

   (c) le plan d'équation cartésienne $x + 7y - z - 7 = 0$

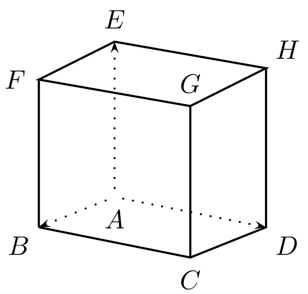
Exercice 4 Inde, Avril 2005

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\ \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1\,;0\,;2)$, $(1\,;1\,;4)$ et $(-1\,;\ 1\,;\ 1)$.

1. (a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   (b) Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;\ 4\,;\ -2)$.
   Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ les plans d'équations respectives $2x+y+2z+1=0$ et $x-2y+6z=0$.
   (a) Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathscr{D}$ dont on déterminera un système d'équations paramétriques.
   (b) La droite $\mathscr{D}$ et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?
3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t.
   (a) Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t.
   Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IC}$.
   (b) Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment $[IC]$ privé du point C.
   Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment $[IC]$ coïncide-t-il avec G ?

Exercice 5 Nouvelle-Calédonie, Novembre 2004

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.).
Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans la grille jointe en fin d'énoncé. Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.
Pour chacune des cinq questions une ou plusieurs réponses sont exactes. Le candidat doit inscrire V (vrai) ou F (faux) dans la case correspondante.
Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, 3 réponses correctes rapportent 1 point et 2 réponses correctes rapportent $0,5$ *point.*



Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 1.
On choisit le repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

On appelle I et J les milieux respectifs des segments $[EF]$ et $[FG]$.
L est le barycentre de $\{(A\,;1),\ (B\,;3)\}$.
Soit (π) le plan d'équation $4x-4y+3z-3=0$.

1. Les coordonnées de L sont :
   (a) $\left(\dfrac{1}{4}\,;\ 0\ ;\ 0\right)$. (b) $\left(\dfrac{3}{4}\,;\ 0\ ;\ 0\right)$. (c) $\left(\dfrac{2}{3}\,;\ 0\ ;\ 0\right)$.

2. Le plan (π) est le plan :
   (a) (GLE). (b) (LEJ). (c) (GFA).
3. Le plan parallèle au plan (π) passant par I coupe la droite (FB) en M de coordonnées :
   (a) $\left(1\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{4}\right)$. (b) $\left(1\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{5}\right)$. (c) $\left(1\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.
4. (a) Les droites (EL) et (FB) sont sécantes en un point N qui est le symétrique de M par rapport à B.
   (b) Les droites (EL) et (IM) sont parallèles.
   (c) Les droites (EL) et (IM) sont sécantes.
5. Le volume du tétraèdre $FIJM$ est :
   (a) $\frac{1}{36}$. (b) $\frac{1}{48}$. (c) $\frac{1}{24}$.

Réponses à l'exercice

(Inscrire V (vrai) ou F (faux) dans la case correspondante)

	(a)	(b)	(c)
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

Exercice 6 Amérique du Nord, Juin 2004

Dans le plan affine, on considère un triangle ABC rectangle en A, I le milieu du segment $[AB]$ et J le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m, différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés :

$$S_m = \{(A\,;\,1),\ (B\,;\,m),\ (C\,;\,2m)\}.$$

Pour tout point M du plan on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

Pour chacune des six affirmations suivantes, dites si elle est vraie (V) ou fausse (F).

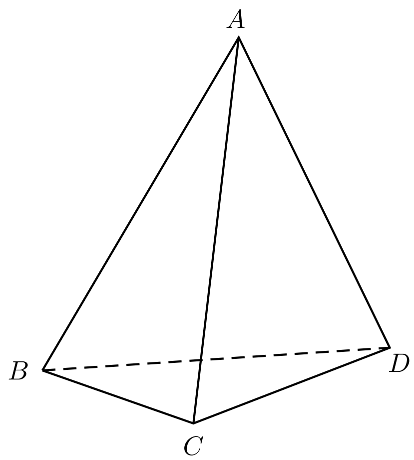
Chaque bonne réponse donne 0,5 *point, chaque réponse fausse ou illisible enlève* 0,25 *point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Un éventuel total négatif serait ramené à* 0.

Affirmation	**V ou F**
G_1 est le milieu du segment $[CI]$.	
G_1 est barycentre de $\left\{(J\,;\,2),\ \left(C\,;\,\frac{2}{3}\right)\right\}$.	
Pour tout point M, $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.	
Pour tout m, distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.	
$IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.	
Pour tout point P de (AG_{-1}), il existe un réel m tel que $P = G_m$.	

Exercice 7 Antilles-Guyane, Juin 2004

On considère le tétraèdre $ABCD$; on note I milieu du segment $[AB]$ et J celui de $[CD]$.

1. (a) Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés $\{(A\,;\,1),\ (B\,;\,1),\ (C\,;\,-1),\ (D\,;\,1)\}$.
   Exprimez $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Placez I, J et G_1 sur la figure suivante.



   (b) Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A\,;\,1),\ (B\,;\,1),\ (D\,;\,2)\}$.
   Démontrez que G_2 est le milieu du segment $[ID]$. Placez G_2.

   (c) Démontrez que IG_1DJ est un parallélogramme.
   En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.

2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(A\,;\,1),\ (B\,;\,1),\ (C\,;\,m-2),\ (D\,;\,m)\}.$$

   (a) Précisez l'ensemble $\mathscr{E}$ des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.
   Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.

   (b) Démontrez que G_m appartient au plan (ICD).

   (c) Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.

   (d) En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points G_m lorsque m décrit l'ensemble $\mathscr{E}$.

Exercice 8 Asie, Juin 2004

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On appelle $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x - y + 5 = 0$ et $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $3x + y - z = 0$.

1. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants en une droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = 2\alpha + 5 \\ z = 5\alpha + 5 \end{array}\right. \qquad \text{où } \alpha \text{ est un nombre réel.}$$

2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier précisément vos réponses :
   – Affirmation 1 : $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{R}$ d'équation $-5x + 5y - z = 0$.
   Soit $\mathscr{D}'$ la droite de l'espace de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x = -3\beta \\ y = 1 + \beta \\ z = 2 + 2\beta \end{array}\right. \qquad \text{où } \beta \text{ est un nombre réel.}$$

   – Affirmation 2 : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires.

Exercice 9 France, Juin 2004

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on donne le point $S(1\;;\;-2\;;\;0)$ et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point S et perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ est :

$$\text{(a)} \left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}. \qquad \text{(b)} \left\{\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{(c)} \left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}. \qquad \text{(d)} \left\{\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite $\mathscr{D}$ avec le plan $\mathscr{P}$ sont :

$$\text{(a) } (-4\;;\;0\;;\;0). \quad \text{(b) } \left(\frac{6}{5}\;;\;-\frac{9}{5}\;;\;-\frac{3}{5}\right). \quad \text{(c) } \left(\frac{7}{9}\;;\;-\frac{2}{3}\;;\;\frac{1}{3}\right). \quad \text{(d) } \left(\frac{8}{11}\;;\;-\frac{25}{11}\;;\;\frac{9}{11}\right).$$

3. La distance du point S au plan $\mathscr{P}$ est égale à :

$$\text{(a) } \frac{\sqrt{11}}{3}. \qquad \text{(b) } \frac{3}{\sqrt{11}}. \qquad \text{(c) } \frac{9}{\sqrt{11}}. \qquad \text{(d) } \frac{9}{11}.$$

4. On considère la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$ est égale :

(a) au point $I(1\ ;\ -5\ ;\ 0)$.

(b) au cercle de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\dfrac{10}{11}}$.

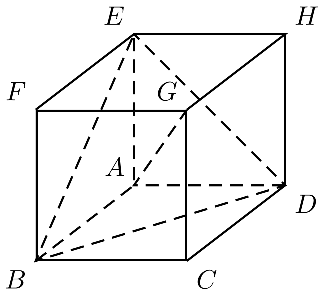
(c) au cercle de centre S et de rayon $r = 2$.

(d) au cercle de centre H et de rayon $r = \dfrac{3\sqrt{10}}{11}$.

Exercice 10 Nouvelle-Calédonie, Mars 2004

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre.
O_1 et O_2 sont les centres des carrés $ABCD$ et $EFGH$, et I est le centre de gravité du triangle EBD.
Soit m un nombre réel et G_m le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(E\ ;\ 1),\ (B\ ;\ 1-m),\ (G\ ;\ 2m-1),\ (D\ ;\ 1-m)\}.$$



Partie A

1. Justifier l'existence du point G_m.
2. Préciser la position du point G_1.
3. Vérifier que $G_0 = A$. En déduire que les points A, I et G sont alignés.
4. Démontrer que $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.
5. (a) Vérifier que les points A, G_m , E et O_1 sont coplanaires.
   (b) Déterminer la valeur de m pour laquelle G_m se trouve sur la droite (EI).

Partie B

Dans cette question, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

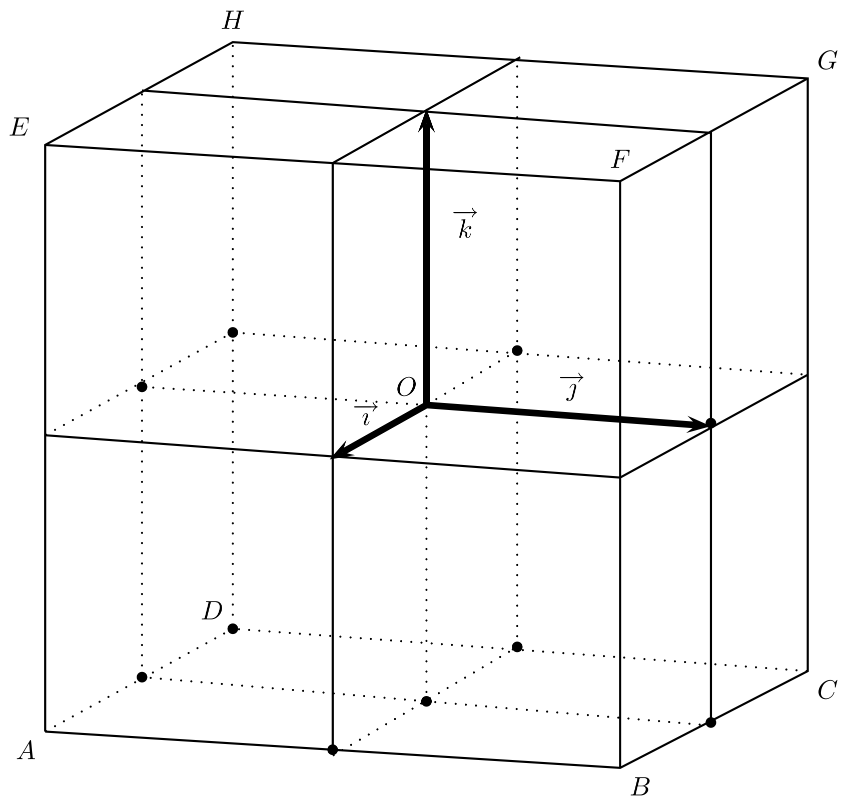
1. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (EBD). En déduire une équation cartésienne du plan (ABD).
2. Déterminer les coordonnées du point G_m.
3. Pour quelles valeurs de m la distance de G_m au plan (EBD) est-elle égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$?

Exercice 11 Amérique du Sud, Novembre 2003

Un sac contient 4 jetons numérotés respectivement -1, 0, 0, 1 et indiscernables au toucher.
On tire un jeton du sac, on note son numéro x et on le remet dans le sac ; on tire un second jeton, on note son numéro y et on le remet dans le sac ; puis on tire un troisième jeton, on note son numéro z et on le remet dans le sac.
Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés.
À chaque tirage de trois jetons, on associe, dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ le point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$.
Sur le graphique ci-dessous, sont placés les 27 points correspondant aux différentes positions possibles du point M. Les coordonnées du point A sont $(1\,;\,-1\,;\,-1)$ dans le repère $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On note $\mathscr{C}$ le cube $ABCDEFGH$.

1. Démontrer que la probabilité que le point M soit en A est égale à $\frac{1}{64}$.
2. On note E_1 l'événement « M appartient à l'axe des abscisses ».

   Démontrer que la probabilité de E_1 est égale à $\frac{1}{4}$.
3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par O et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n}(1\,;\,1\,;\,1)$.
   (a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.
   (b) Tracer en couleur sur le graphique ci-dessous, la section du plan $\mathscr{P}$ et du cube $\mathscr{C}$. (On ne demande pas de justification).
   (c) On note E_2 l'événement « M appartient à $\mathscr{P}$ ». Quelle est la probabilité de l'événement E_2 ?
4. On désigne par $\mathscr{B}$ la boule de centre O et de rayon $1,5$ (c'est-à-dire l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leqslant 1,5$).
   On note E_3 l'événement « M appartient à la boule $\mathscr{B}$ ».
   Déterminer la probabilité de l'événement E_3.



Exercice 12 Nouvelle-Calédonie, Novembre 2003

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$; on considère les points $A(3\,;\,0\,;\,10)$, $B(0\,;\,0\,;\,15)$ et $C(0\,;\,20\,;\,0)$.

1. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
   (b) Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses au point $E(9\ ;\ 0\ ;0)$.
   (c) Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC.

(a) Justifier que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OEH). En déduire que (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC.

(b) Déterminer une équation cartésienne du plan (OEH).

(c) Vérifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

$$20x + 9y + 12z - 180 = 0.$$

(d) Montrer que le système :

$$\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases}$$

a une solution unique. Que représente cette solution ?

(e) Calculer la distance OH, en déduire que $EH = 15$ et l'aire du triangle EBC.

3. En exprimant de deux façons le volume du tétraèdre $OEBC$, déterminer la distance du point O au plan (ABC). Pouvait-on prévoir le résultat à partir de l'équation obtenue en **2.(c)** ?

Exercice 13 Polynésie, Septembre 2003

L'espace est rapporté à un repère $\left(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ orthonormé. Soit s un nombre réel.
On donne les points $A(8\,;\,0\,;\,8)$, $B(10\,;\,3\,;\,10)$ ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équations paramétriques :

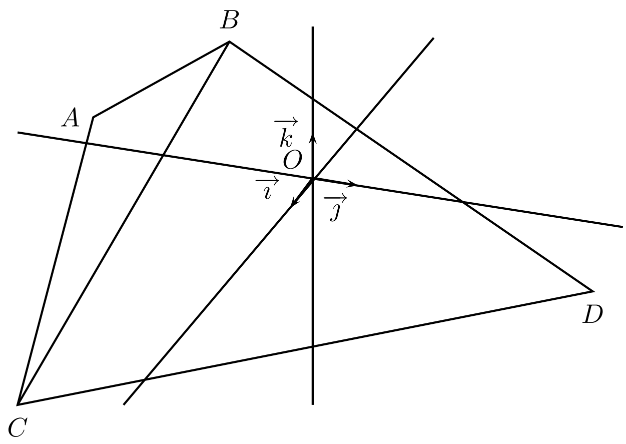
$$\begin{cases} x = -5 + 3s \\ y = 1 + 2s \\ z = -2s \end{cases}.$$

1. (a) Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ définie par A et B.
   (b) Démontrer que $\mathscr{D}$ et Δ sont non coplanaires.
2. (a) Le plan $\mathscr{P}$ est parallèle à $\mathscr{D}$ et contient Δ. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;\,-2\,;\,1)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.
   (b) Montrer que la distance d'un point quelconque M de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{P}$ est indépendante de M.
   (c) Donner un système d'équations paramétriques de la droite définie par l'intersection de $\mathscr{P}$ avec le plan (xOy).
3. La sphère $\mathscr{S}$ est tangente à $\mathscr{P}$ au point $C(10\,;\,1\,;\,6)$. Le centre Ω de $\mathscr{S}$ se trouve à la distance $d = 6$ de $\mathscr{P}$, du même côté que O.
   Donner l'équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

Exercice 14 Asie, Juin 2003

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$$A(3\,;\,-2\,;\,2) \quad ; \quad B(6\,;\,1\,;\,5) \quad ; \quad C(6\,;\,-2\,;\,-1).$$



Partie A

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$.
   Montrer que $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3. Soit $\mathscr{P}'$ le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A.
   Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}'$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

Partie B

1. Soit D le point de coordonnées $(0\,;\,4\,;\,-1)$.
   Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2. Calculer le volume du tétraèdre $ABDC$.
3. Montrer que l'angle géométrique $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian.
4. (a) Calculer l'aire du triangle BDC.
   (b) En déduire la distance du point A au plan (BDC).

Exercice 15 France, Juin 2003

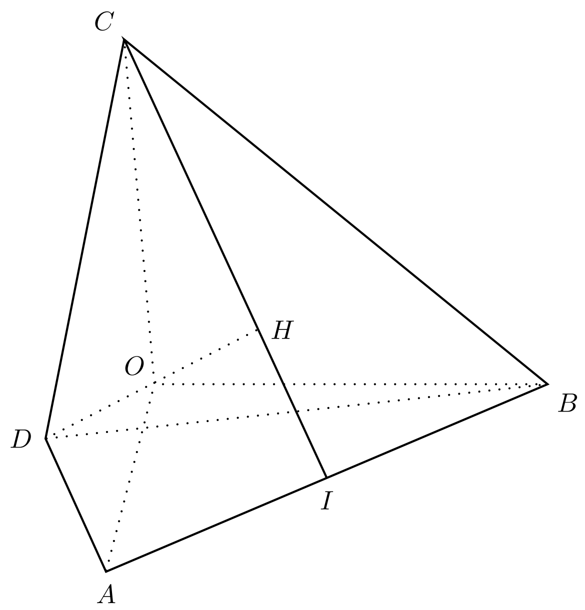
Soit a un réel strictement positif et $OABC$ un tétraèdre tel que :
– OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O ;
– $OA = OB = OC = a$.
On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3. Calcul de OH
   (a) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $OABC$ puis l'aire $\mathcal{S}$ du triangle ABC.
   (b) Exprimer OH en fonction de $\mathcal{V}$ et de $\mathcal{S}$, en déduire que $OH = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
4. Étude du tétraèdre $ABCD$
   L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O\ ;\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OA},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OB},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right)$.

(a) Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\frac{a}{3}\,;\,\frac{a}{3}\,;\,\frac{a}{3}\right)$.

(b) Démontrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).

(c) Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.



Exercice 16 La Réunion, Juin 2003

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.
Le nombre a désigne un réel strictement positif.
On considère le point M de la demi-droite $[AE)$ défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a}\,\overrightarrow{AE}$.

1. Déterminer le volume du tétraèdre $ABDM$ en fonction de a.
2. Soit K le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(M\,;\,a^2),\ (B\,;\,1),\ (D\,;\,1)\}.$$

   (a) Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BM}$ et de $\overrightarrow{BD}$.

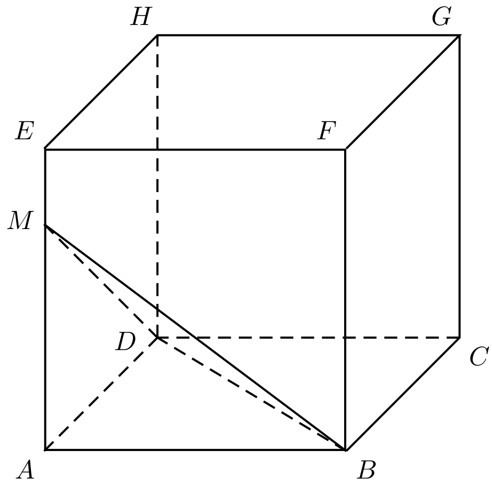
   (b) Calculer $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AD}$ puis en déduire l'égalité $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{MD} = 0$.

   (c) Démontrer l'égalité $\overrightarrow{DK}.\overrightarrow{MB} = 0$.

   (d) Démontrer que K est l'orthocentre du triangle BDM.

3. Démontrer les égalités $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MD} = 0$. Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?
4. (a) Montrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\frac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ unité d'aire.

   (b) Déterminer le réel a tel que l'aire du triangle BDM soit égale à 1 unité d'aire. Déterminer la distance AK dans ce cas.



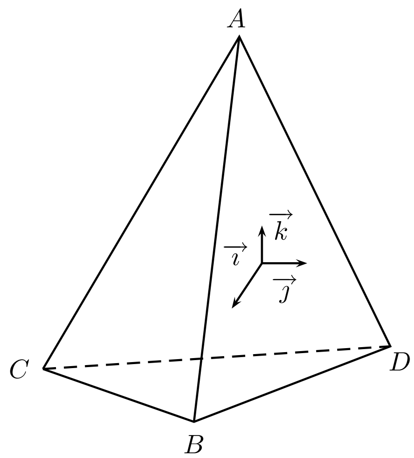
Exercice 17 Polynésie, Juin 2003

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath},\,\overrightarrow{k}\right)$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives :

$$A(0\,;\,0\,;\,3),\ B(2\sqrt{2}\,;\,0\,;\,-1),\ C(-\sqrt{2}\,;\,-\sqrt{6}\,;\,-1),\ D(-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{6}\,;\,-1).$$

1. Démontrer que $ABCD$ est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur.
2. On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes $[AC]$, $[AD]$, $[BD]$ et $[BC]$; démontrer que $RSTU$ est un parallélogramme de centre O.
3. Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.



Partie B

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.
On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1. Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.
2. Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.

3. Calculer la probabilité de l'événement E « les six faces rouges sont visibles ».
4. On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.
   Calculer la probabilité p_n pour que l'événement E soit réalisé au moins une fois.
   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 18 Nouvelle-Calédonie, Novembre 2001

Partie I

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$(-1\,;\,0\,;\,2),\quad (3\,;\,2\,;\,-4),\quad (1\,;\,-4\,;\,2),\quad (5\,;\,-2\,;\,4).$$

On considère les points I, J et K définis par : I est le milieu du segment $[AB]$, K est le milieu du segment $[CD]$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2. (a) Montrer que les points I, J et K ne sont pas alignés.
   (b) Justifier qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est :
   $$8x + 9y + 5z - 12 = 0.$$
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et montrer que le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécants en un point L dont on déterminera les coordonnées.
   (d) Montrer que :
   $$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

Partie II

Plus généralement, dans l'espace $\mathscr{E}$, on considère un tétraèdre $ABCD$ ainsi que les points I, J, K et L définis par I milieu du segment $[AB]$, K milieu du segment $[CD]$,

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.$$

Soit G le barycentre de $\{(A\,;\,3),\ (B\,;\,3),\ (C\,;\,1),\ (D\,;\,1)\}$.

1. Déterminer le barycentre de $\{(A\,;\,3),\ (D\,;\,1)\}$ et le barycentre de $\{(B\,;\,3),\ (C\,;\,1)\}$.
2. En associant les points A, B, C et D de deux façons différentes, montrer que G appartient aux droites (IK) et (JL). En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.

Exercice 19 Amérique du Nord, Juin 2001

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$. On considère les trois points $A(2\,;\,0\,;\,0)$, $B(1\,;\,1\,;\,0)$ et $C(3\,;\,2\,;\,6)$. $\mathscr{D}$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\,(0\,;\,1\,;\,1)$ et Δ la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{v}\,(1\,;\,-2\,;\,2)$.

1. Écrire une représentation paramétrique de chacune des droites $\mathscr{D}$ et Δ puis montrer que $\mathscr{D}$ et Δ sont sécantes en un point dont on précisera les coordonnées.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ (hors programme en 2002), puis écrire une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Soit H le projeté orthogonal du point $F(2\,;\,4\,;\,4)$ sur le plan (ABC).
   (a) Expliquer pourquoi il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{FH} = k\overrightarrow{w}$.
   (b) Déterminer la valeur de k et en déduire les coordonnées de H.
   (c) Calculer le volume du tétraèdre $FABC$.

Exercice 20 Centres étrangers, Juin 2001

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath})$ (unité graphique 4 cm), dans lequel on considère les points $A(2\,;\,0)$, $B(0\,;\,2)$ et $C(-2\,;\,-2)$.

1. Soient a, b et c les nombres définis pour t réel par :

$$\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2}\sin 2t + \dfrac{2}{3}\cos t + \dfrac{2}{3} \\ b = \sin 2t - \dfrac{1}{3}\cos t + \dfrac{2}{3} \\ c = -\dfrac{1}{2}\sin 2t - \dfrac{1}{3}\cos t + \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

   (a) Démontrer que, pour tout réel t, il existe un barycentre, noté $G(t)$, du système de points pondérés $\{(A\,;\,a),\,(B\,;\,b),\,(C\,;\,c)\}$.
   (b) Montrer que, pour tout réel t, les coordonnées du point $G(t)$ sont :

$$x(t) = \cos t \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{3}{2}\sin 2t.$$

   Lorsque le paramètre t varie, ce barycentre décrit une courbe (Γ), que l'on se propose d'étudier.
2. Étude des symétries de la courbe (Γ)
   (a) Étudier les positions relatives des points $G(t)$ et $G(t + 2\pi)$.
   (b) Étudier les positions relatives des points $G(t)$ et $G(-t)$.
   (c) Étudier les positions relatives des points $G(t)$ et $G(\pi - t)$.
   (d) Déduire de ce qui précède, en justifiant la démarche, un intervalle d'étude approprié pour les fonctions x et y.
3. (a) Étudier le sens de variation de chacune des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et les faire apparaître dans un même tableau.
   (b) Placer les points de (Γ) correspondant aux valeurs du paramètre 0, $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ et tracer les tangentes à la courbe (Γ) en ces points.
   (c) Tracer la partie de (Γ) obtenue lorsque t appartient à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ puis tracer (Γ) complètement. (hors programme en 2002)

Exercice 21 France, Juin 2001

Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
On note G_k le barycentre du système :

$$\{(A\,;\,k^2+1),\ (B\,;\,k),\ (C\,;\,-k)\}.$$

1. Représenter les points A, B, C, le milieu I de $[BC]$ et construire les points G_1 et G_{-1}.
2. (a) Montrer que, pour tout réel k de l'intervalle $[-1\,;\,1]$, on a l'égalité :

$$\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{k^2+1}\,\overrightarrow{BC}.$$

   (b) Établir le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-1\,;\,1]$ par :

$$f(x) = -\frac{x}{x^2+1}\,.$$

   (c) En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
   Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.
3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M de l'espace tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|.$$

4. Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M de l'espace tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|.$$

5. L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath},\,\overrightarrow{k}\right)$. Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(0\,;\,0\,;\,2)$, $(-1\,;\,2\,;\,1)$ et $(-1\,;\,2\,;\,5)$. Le point G_k et les ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont définis comme ci-dessus.

   (a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}. Montrer que les ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont sécants.

   (b) Calculer le rayon du cercle $\mathscr{C}$ intersection de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$.